Inhalt

1. Aufgabenstellung
2. Übertragung in Gauß-Schema
3. Was will man mit dem Gauß-Algorithmus erreichen?
4. Was bringt die „Stufenform“?
5. Wie bringt man das Gleichungssystem in Stufenform?
6. Berechnung eines Beispiels
7. Stimmt das Ergebnis?

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_3 = 3$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmuses die drei Unbekannten.

2. Übertragung in Gauß-Schema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}$$

3. Was will man mit dem Gauß-Algorithmus erreichen?

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
?	?	?	?
0	?	?	?
0	0	?	?

$\leftarrow$

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	-1	2	0
-2	1	-6	0
1	0	-2	3

Ziel: Gleichungssystem in „Stufenform“ bringen

$\rightarrow$ alle Koeffzienten unter der Hauptdiagonalen müssen „0“ sein

4. Was bringt die „Stufenform“?

Beispiel

$$
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\
\hline
1 & -1 & 2 & 0 \\
0 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -6 & 3
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\
-x_2 - 2x_3 &= 0 \\
-6x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Umwandlung des Gleichungssystems in die „normale“ Darstellung

4. Was bringt die „Stufenform“?

Beispiel

$$-6x_3 = 3$$

$$x_3 = \frac{3}{-6} = -0{,}5 \quad \longleftarrow$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\boxed{-6x_3 = 3}$$

Ergebnisse: $x_3 = -0{,}5$

Jetzt lassen sich die drei Unbekannten nacheinander „mühelos“ berechnen.

4. Was bringt die „Stufenform"?

Beispiel

$$-x_2 - 2\cdot(-0{,}5) = 0$$
$$-x_2 + 1 = 0$$
$$-x_2 = -1$$
$$x_2 = 1$$

$$\leftarrow$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$\boxed{-x_2 - 2x_3 = 0}$$
$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse: $x_3 = -0{,}5$ $x_2 = 1$

Einsetzen von x_3 in die 2. Gleichung → Auflösen der 2. Gleichung nach x_2

4. Was bringt die „Stufenform“?

Beispiel

$$\boxed{x_1 - x_2 + 2x_3 = 0}$$
$$-x_2 - 2x_3 = 0$$
$$-6x_3 = 3$$

$$x_1 - 1 + 2\cdot(-0{,}5) = 0$$
$$x_1 - 2 = 0 \quad \longleftarrow$$
$$x_1 = 2$$

Ergebnisse: $x_3 = -0{,}5$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_1 = 2$

Einsetzen von x_3 und x_2 in die 1. Gleichung → Auflösen der 1. Gleichung nach x_1

5. Wie bringt man das Gleichungssystem in Stufenform?

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	-1	2	0
-2	1	-6	0
1	0	-2	3

Zeilen darf man...

...vertauschen

...mit einer Zahl multiplizieren

...durch eine Zahl dividieren

...miteinander addieren

...miteinander subtrahieren

6. Berechnung eines Beispiels

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	-1	2	0
-2	1	-6	0
1	0	-2	3

Nächster Schritt:

3. Zeile – 1. Zeile

Ziel: alle Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen sollen gleich „0“ sein

6. Berechnung eines Beispiels

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	-1	2	0
-2	1	-6	0
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{3}$

Nächster Schritt:

2 x 1. Zeile

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{0}$
-2	1	-6	0
0	1	-4	3

Nächster Schritt:

2. Zeile + 1. Zeile

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
2	-2	4	0
$\mathbf{0}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$
0	1	-4	3

Nächster Schritt:

1. Zeile :2

3. Zeile + 2. Zeile

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	-1	2	0
0	-1	-2	0
0	0	-6	3

Da alle Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen gleich „0“ sind, können wir im nächsten Schritt bereits die Unbekannten berechnen.

6. Berechnung eines Beispiels

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	-1	2	0
0	-1	-2	0
0	0	-6	3

$$\longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Umwandlung des Gleichungssystems in die „normale“ Darstellung

$$-6x_3 = 3$$

$$x_3 = \frac{3}{-6} = -0{,}5 \longleftarrow$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\boxed{-6x_3 = 3}$$

Ergebnisse: $x_3 = -0{,}5$

Jetzt lassen sich die drei Unbekannten nacheinander „mühelos“ berechnen.

$$-x_2 - 2\cdot(-0{,}5) = 0$$
$$-x_2 + 1 = 0$$
$$-x_2 = -1$$
$$x_2 = 1$$

$$\leftarrow$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$\boxed{-x_2 - 2x_3 = 0}$$
$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse: $x_3 = -0{,}5$ $\quad x_2 = 1$

Einsetzen von x_3 in die 2. Gleichung → Auflösen der 2. Gleichung nach x_2

6. Berechnung eines Beispiels

$$x_1 - 1 + 2 \cdot (-0{,}5) = 0$$

$$x_1 - 2 = 0 \longleftarrow$$

$$x_1 = 2$$

$$\boxed{x_1 - x_2 + 2x_3 = 0}$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse: $x_3 = -0{,}5$ $x_2 = 1$ $x_1 = 2$

Einsetzen von x_3 und x_2 in die 1. Gleichung → Auflösen der 1. Gleichung nach x_1

7. Stimmt das Ergebnis?

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 & \qquad 2 - 1 + 2\cdot(-0{,}5) &= 0 \checkmark \\
-2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 0 \quad \longrightarrow & \qquad -2\cdot 2 + 1 - 6\cdot(-0{,}5) &= 0 \checkmark \\
x_1 - 2x_3 &= 3 & \qquad \mathbf{2} - 2\cdot(\mathbf{-0{,}5}) &= 3 \checkmark
\end{aligned}
$$

Um das Ergebnis zu überprüfen, setzt man die berechneten x-Werte in das ursprüngliche Gleichungssystem ein. Stimmen die Gleichungen?

Ergebnisse: $x_1 = 2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -0{,}5$