

## Inhalt

1. Aufgabenstellung
2. Übertragung in Gauß-Schema
3. Was will man mit dem Gauß-Algorithmus erreichen?
4. Was bringt die „Stufenform“?
5. Wie bringt man das Gleichungssystem in Stufenform?
6. Berechnung eines Beispiels
7. Stimmt das Ergebnis?

# 1. Aufgabenstellung

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_3 = 3$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmuses die drei Unbekannten.

## 2. Übertragung in Gauß-Schema

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r. S. \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}$$

### 3. Was will man mit dem Gauß-Algorithmus erreichen?

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r. S.$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r. S.$
?	?	?	?		1	-1	2	0
0	?	?	?	←	-2	1	-6	0
0	0	?	?		1	0	-2	3

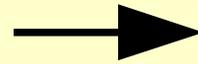
Ziel: Gleichungssystem in „Stufenform“ bringen

→ alle Koeffizienten unter der Hauptdiagonalen müssen „0“ sein

## 4. Was bringt die „Stufenform“?

Beispiel

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r. S.$
1	-1	2	0
0	-1	-2	0
0	0	-6	3



$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -6x_3 &= 3\end{aligned}$$

Umwandlung des Gleichungssystems in die „normale“ Darstellung

## 4. Was bringt die „Stufenform“?

Beispiel

$$-6x_3 = 3$$

$$x_3 = \frac{3}{-6} = -0,5 \quad \leftarrow$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse:  $x_3 = -0,5$

Jetzt lassen sich die drei Unbekannten nacheinander „müheles“ berechnen.

## 4. Was bringt die „Stufenform“?

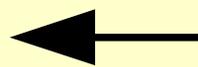
Beispiel

$$-x_2 - 2 \cdot (-0,5) = 0$$

$$-x_2 + 1 = 0$$

$$-x_2 = -1$$

$$x_2 = 1$$



$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse:  $x_3 = -0,5$      $x_2 = 1$

Einsetzen von  $x_3$  in die 2. Gleichung  $\rightarrow$  Auflösen der 2. Gleichung nach  $x_2$

## 4. Was bringt die „Stufenform“?

Beispiel

$$x_1 - 1 + 2 \cdot (-0,5) = 0$$

$$x_1 - 2 = 0 \quad \leftarrow$$

$$x_1 = 2$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse:  $x_3 = -0,5$      $x_2 = 1$      $x_1 = 2$

Einsetzen von  $x_3$  und  $x_2$  in die 1. Gleichung  $\rightarrow$  Auflösen der 1. Gleichung nach  $x_1$

## 5. Wie bringt man das Gleichungssystem in Stufenform?

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r. S.$
1	-1	2	0
-2	1	-6	0
1	0	-2	3



Zeilen darf man...

...vertauschen

...mit einer Zahl multiplizieren

...durch eine Zahl dividieren

...miteinander addieren

...miteinander subtrahieren

## 6. Berechnung eines Beispiels

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r. S.$
1	-1	2	0
-2	1	-6	0
1	0	-2	3

Nächster Schritt:

3. Zeile – 1. Zeile

Ziel: alle Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen sollen gleich „0“ sein

## 6. Berechnung eines Beispiels

$x_1$	$x_2$	$x_3$	<i>r. S.</i>
1	-1	2	0
-2	1	-6	0
0	1	-4	3

Nächster Schritt:

2 x 1. Zeile

## 6. Berechnung eines Beispiels

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r. S.$
2	-2	4	0
-2	1	-6	0
0	1	-4	3

Nächster Schritt:

2. Zeile + 1. Zeile

## 6. Berechnung eines Beispiels

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r. S.$
2	-2	4	0
0	-1	-2	0
0	1	-4	3

Nächster Schritt:

1. Zeile :2

3. Zeile + 2. Zeile

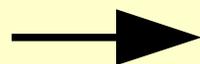
## 6. Berechnung eines Beispiels

$x_1$	$x_2$	$x_3$	<i>r. S.</i>
1	-1	2	0
0	-1	-2	0
0	0	-6	3

Da alle Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen gleich „0“ sind, können wir im nächsten Schritt bereits die Unbekannten berechnen.

## 6. Berechnung eines Beispiels

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r. S.$
1	-1	2	0
0	-1	-2	0
0	0	-6	3



$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -6x_3 &= 3\end{aligned}$$

Umwandlung des Gleichungssystems in die „normale“ Darstellung

## 6. Berechnung eines Beispiels

$$-6x_3 = 3$$

$$x_3 = \frac{3}{-6} = -0,5 \quad \leftarrow$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse:  $x_3 = -0,5$

Jetzt lassen sich die drei Unbekannten nacheinander „müheles“ berechnen.

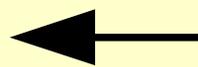
## 6. Berechnung eines Beispiels

$$-x_2 - 2 \cdot (-0,5) = 0$$

$$-x_2 + 1 = 0$$

$$-x_2 = -1$$

$$x_2 = 1$$



$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse:  $x_3 = -0,5$      $x_2 = 1$

Einsetzen von  $x_3$  in die 2. Gleichung  $\rightarrow$  Auflösen der 2. Gleichung nach  $x_2$

## 6. Berechnung eines Beispiels

$$x_1 - 1 + 2 \cdot (-0,5) = 0$$

$$x_1 - 2 = 0 \quad \leftarrow$$

$$x_1 = 2$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-6x_3 = 3$$

Ergebnisse:  $x_3 = -0,5$      $x_2 = 1$      $x_1 = 2$

Einsetzen von  $x_3$  und  $x_2$  in die 1. Gleichung  $\rightarrow$  Auflösen der 1. Gleichung nach  $x_1$

## 7. Stimmt das Ergebnis?

$$\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 & & 2 - 1 + 2 \cdot (-0,5) = 0 \quad \checkmark \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 & \longrightarrow & -2 \cdot 2 + 1 - 6 \cdot (-0,5) = 0 \quad \checkmark \\ x_1 - 2x_3 = 3 & & 2 - 2 \cdot (-0,5) = 3 \quad \checkmark \end{array}$$

Um das Ergebnis zu überprüfen, setzt man die berechneten x-Werte in das ursprüngliche Gleichungssystem ein. Stimmen die Gleichungen?

Ergebnisse:  $x_1 = 2$      $x_2 = 1$      $x_3 = -0,5$