Inverse Matrix berechnen (nach Cramer)

Inhalt

1. Was ist eine inverse Matrix?
2. Berechnung eines Beispiels
3. Zusammenfassung

1. Was ist eine inverse Matrix?

$$A \cdot \mathbf{A}^{-1} = E$$

Eine beliebige nxn Matrix multipliziert mit ihrer Inversen ergibt die Einheitsmatrix.

Rechnungsansatz

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ziel: Spaltenweise Berechnung der Einträge der inversen Matrix.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{matrix}} & \begin{matrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_{11} - x_{21} &= 1 \\ x_{11} + 2x_{21} - 2x_{31} &= 0 \\ -x_{21} + x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Aus der Matrix A, der 1. Spalte der inversen Matrix und der 1. Spalte der Einheitsmatrix bilden wir ein Gleichungssystem durch Matrizenmultiplikation.

2. Berechnung eines Beispiels

$$
\begin{aligned}
2x_{11} - x_{21} &= \boxed{1} \\
x_{11} + 2x_{21} - 2x_{31} &= 0 \\
-x_{21} + x_{31} &= 0
\end{aligned}
$$

Anwendung der Cramerschen Regel, um das Gleichungssystem zu lösen.

$$x_{11} = \frac{\det(A_1)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 0 \qquad x_{21} = \frac{\det(A_2)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = -1 \qquad x_{31} = \frac{\det(A_3)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = -1$$

2. Berechnung eines Beispiels

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \boxed{\begin{matrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{matrix}} & x_{13} \\ x_{21} & & x_{23} \\ x_{31} & & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_{12} - x_{22} &= \boxed{0} \\ x_{12} + 2x_{22} - 2x_{32} &= \boxed{1} \\ -x_{22} + x_{32} &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Aus der Matrix A, der 2. Spalte der inversen Matrix und der 2. Spalte der Einheitsmatrix bilden wir ein Gleichungssystem durch Matrizenmultiplikation.

2. Berechnung eines Beispiels

$$\begin{aligned} 2x_{12} - x_{22} &= 0 \\ x_{12} + 2x_{22} - 2x_{32} &= 1 \\ -x_{22} + x_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung der Cramerschen Regel, um das Gleichungssystem zu lösen.

$$x_{12} = \frac{\det(A_1)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 1 \qquad x_{22} = \frac{\det(A_2)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 2 \qquad x_{32} = \frac{\det(A_3)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 2$$

2. Berechnung eines Beispiels

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \boxed{x_{13}} \\ x_{21} & x_{22} & \boxed{x_{23}} \\ x_{31} & x_{32} & \boxed{x_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_{13} - x_{23} &= 0 \\ x_{13} + 2x_{23} - 2x_{33} &= 0 \\ -x_{23} + x_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Aus der Matrix A, der 3. Spalte der inversen Matrix und der 3. Spalte der Einheitsmatrix bilden wir ein Gleichungssystem durch Matrizenmultiplikation.

2. Berechnung eines Beispiels

$$2x_{13} - x_{23} = \boxed{0}$$
$$x_{13} + 2x_{23} - 2x_{33} = \boxed{0}$$
$$-x_{23} + x_{33} = \boxed{1}$$

Anwendung der Cramerschen Regel, um das Gleichungssystem zu lösen.

$$x_{13} = \frac{det(A_1)}{det\ A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 2 \qquad x_{23} = \frac{det(A_2)}{det\ A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 4 \qquad x_{33} = \frac{det(A_3)}{det\ A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 5$$

3. Zusammenfassung

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}
x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 0 & x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -1 & x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = -1 \\
x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 & x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 & x_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 \\
x_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 & x_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 4 & x_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 5
\end{pmatrix}$$