Inverse Matrix berechnen (nach Gauss-Jordan)

Inhalt

1. Was ist eine inverse Matrix?
2. Was ist das Ziel?
3. Berechnung eines Beispiels

1. Was ist eine inverse Matrix?

$$A \cdot \mathbf{A^{-1}} = E$$

Eine beliebige nxn Matrix multipliziert mit ihrer Inversen ergibt die Einheitsmatrix.

1. Was ist eine inverse Matrix?

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Was ist das Ziel?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zunächst schreibt man die Matrix A und die Einheitsmatrix in die sog. „Blockmatrix“.

An dieser Stelle ist es unsere primäre Aufgabe, die Matrix A mit Hilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus in die Einheitsmatrix umzuwandeln. Die dabei notwendigen Schritte wenden wir gleichzeitig auf der rechten Seite der Blockmatrix an. Sobald die Matrix A zur Einheitsmatrix umgewandelt wurde, finden wir auf der rechten Seite der Blockmatrix die gesuchte Inverse der Matrix A. Um dieses Ziel zu erreichen, darf man...

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Matrix } A \\ \downarrow \\ \text{Einheitsmatrix}\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

..Zeilen..

...vertauschen
...mit einer Zahl multiplizieren
...durch eine Zahl dividieren
...miteinander addieren
...miteinander subtrahieren

2. Was ist das Ziel?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Matrix A $\downarrow$ Einheitsmatrix

Einheitsmatrix $\downarrow$ Matrix A^{-1}

1. Zeile : 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Zeile – 1. Zeile

$$\Big\downarrow \qquad \qquad \Big\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & -2 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Berechnung eines Beispiels

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2,5} & -2 & -0,5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{2. Zeile : 2,5}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,8 & -0,2 & 0,4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Berechnung eines Beispiels

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Zeile
+ 2. Zeile

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 & 1 \end{array}\right)$$

3. Berechnung eines Beispiels

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}2} & -0{,}2 & 0{,}4 & 1 \end{array}\right)$$

3. Zeile : 0,2

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

3. Berechnung eines Beispiels

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-0{,}8} & -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

2. Zeile
+ 0,8*3.Zeile

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

3. Berechnung eines Beispiels

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{-0{,}5} & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

1. Zeile
+ 0,5*2.Zeile

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \text{Matrix } A^{-1}$$